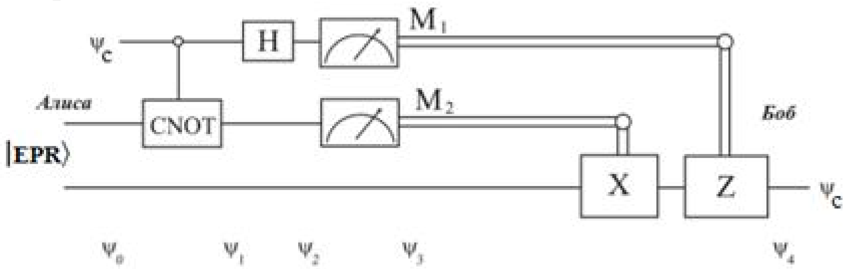
Квантовая телепортация: подробный анализ

Путенихин П.В.
m55@mail.ru

Аннотация
Подробно рассмотрены базовые математические выкладки, положенные в основу квантовой телепортации. Использованы различные «телепортационные несущие» - пары кубитов, осуществляющих перенос квантового состояния, в том числе четыре запутанных состояния Белла.

Имеющиеся в литературе математические описания квантовой телепортации приводятся в несколько упрощённом виде, без подробных промежуточных выкладок. Это хорошо для подготовленного читателя. При первом знакомстве с квантовой телепортацией возникает ложное впечатление о её сходстве с давно известной из художественной литературы научно-фантастической телепортацией, то есть, с перемещением тел, минуя промежуточные положения. Нет, реальная квантовая телепортация не имеет практически ничего общего с научно-фантастической.

Попробуем проанализировать математику квантовой телепортации более подробно, чем это есть в литературе. Рассмотрим один из вариантов схемы установки для осуществления этой телепортации. Напомню, что в отличие от традиционной телепортации, в квантовой телепортируется не физический объект, а некие сведения о его состоянии. Мгновенно и на большое расстояние передаётся так называемая «квантовая информация», то есть, состояние квантовой частицы – кубита, состояние которого не известно, например, a|0>+b|1>. В качестве кубита используется фотон.



Элементы: гейт CNOT, гейт Адамара H и измерители M_1, M_2 находятся на стороне Алисы, а гейты X и Z - на стороне Боба. В качестве «носителя» традиционно используются запутанные частицы в одном из состояний Белла:

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

Одна из частиц запутанной пары остаётся у Алисы, а другая отправляется Бобу. Однако, запутанных состояний известно четыре и все они могут быть использованы в протоколе телепортации. Это следующие состояния Белла:

$$\left|\phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right)$$

$$\left|\psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right)$$

Рассмотрим выкладки, использующие все эти состояния. Для этого обозначим кубит, состояние которого телепортируется, нижним индексом C, а кубиты, принадлежащие Алисе и Бобу, соответственно, индексами A и B. Тогда состояния кубитов, участвующих в телепортации, будут записаны таким образом:

$$|\Psi_C\rangle = \alpha|0_C\rangle + \beta|1_C\rangle$$

$$\left|EPR^{\phi\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A 0_B\rangle \pm |1_A 1_B\rangle\right)$$

$$\left|EPR^{\psi\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A 1_B\rangle \pm |1_A 0_B\rangle\right)$$

Таким образом, для каждого из четырёх протоколов телепортации, в зависимости от используемого состояния Белла - телепортационной «несущей», состояние на входе устройства телепортации будет, соответственно, иметь вид:

$$\left|\Psi_0^{\phi}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|0_C\right\rangle + \beta\left|1_C\right\rangle\right)\otimes\left(\left|0_A 0_B\right\rangle \pm \left|1_A 1_B\right\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(\left|0_A 0_B\right\rangle \pm \left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(\left|0_A 0_B\right\rangle \pm \left|1_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

и

$$\left|\Psi_0^{\psi}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|0_C\right\rangle + \beta\left|1_C\right\rangle\right)\otimes\left(\left|0_A 1_B\right\rangle \pm \left|1_A 0_B\right\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(\left|0_A 1_B\right\rangle \pm \left|1_A 0_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(\left|0_A 1_B\right\rangle \pm \left|1_A 0_B\right\rangle\right)\right\}$$

Это четыре уравнения телепортации: каждое из двух выражений описывает два состояния. Кубиты Алисы пропускаются через гейт CNOT, что приводит к изменению состояний запутанной частицы Алисы на управляемом входе гейта. Совместное состояние всех трёх частиц принимает, соответственно, вид:

$$\left|\Psi_1^{\phi}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(\left|0_A 0_B\right\rangle \pm \left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(\left|1_A 0_B\right\rangle \pm \left|0_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

$$\left|\Psi_1^{\psi}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(\left|0_A 1_B\right\rangle \pm \left|1_A 0_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(\left|1_A 1_B\right\rangle \pm \left|0_A 0_B\right\rangle\right)\right\}$$

Далее телепортируемый кубит C Алисы пропускается через гейт Адамара H, в котором он преобразуется по правилу:

$$\left|0\right\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$$

$$\left|1\right\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right)$$

Отсюда получаем третье состояние (напомню: для всех четырех состояний Белла):

$$\left|\Psi_2^{\phi}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|0_A 0_B\right\rangle \pm \left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|1_A 0_B\right\rangle \pm \left|0_A 1_B\right\rangle\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\alpha\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|0_A 0_B\right\rangle \pm \left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|1_A 0_B\right\rangle \pm \left|0_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

$$\left|\Psi_2^{\psi}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|0_A 1_B\right\rangle \pm \left|1_A 0_B\right\rangle\right) + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|1_A 1_B\right\rangle \pm \left|0_A 0_B\right\rangle\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\alpha\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|0_A 1_B\right\rangle \pm \left|1_A 0_B\right\rangle\right) + \beta\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left(\left|1_A 1_B\right\rangle \pm \left|0_A 0_B\right\rangle\right)\right\}$$

Раскроем скобки и перегруппируем кубиты в этом уравнении по их принадлежности Алисе или Бобу (кубиты C и A оба принадлежат Алисе, поэтому индекс им оставляем общий - A):

$$\left|\Psi_2^{\phi}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\alpha|0\rangle_C|0\rangle_A|0\rangle_B \pm \alpha|0\rangle_C|1\rangle_A|1\rangle_B + \alpha|1\rangle_C|0\rangle_A|0\rangle_B \pm \alpha|1\rangle_C|1\rangle_A|1\rangle_B + \\ \beta|0\rangle_C|1\rangle_A|0\rangle_B \pm \beta|0\rangle_C|0\rangle_A|1\rangle_B - \beta|1\rangle_C|1\rangle_A|0\rangle_B \mp \beta|1\rangle_C|0\rangle_A|1\rangle_B\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}+\alpha|00\rangle_A|0\rangle_B \pm \alpha|01\rangle_A|1\rangle_B + \alpha|10\rangle_A|0\rangle_B \pm \alpha|11\rangle_A|1\rangle_B \pm \\ \pm\beta|00\rangle_A|1\rangle_B + \beta|01\rangle_A|0\rangle_B \mp \beta|10\rangle_A|1\rangle_B - \beta|11\rangle_A|0\rangle_B\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\Psi_2^{\psi}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\alpha|0\rangle_C|0\rangle_A|1\rangle_B \pm \alpha|0\rangle_C|1\rangle_A|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_C|0\rangle_A|1\rangle_B \pm \alpha|1\rangle_C|1\rangle_A|0\rangle_B + \\ \beta|0\rangle_C|1\rangle_A|1\rangle_B \pm \beta|0\rangle_C|0\rangle_A|0\rangle_B - \beta|1\rangle_C|1\rangle_A|1\rangle_B \mp \beta|1\rangle_C|0\rangle_A|0\rangle_B\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}+\alpha|00\rangle_A|1\rangle_B \pm \alpha|01\rangle_A|0\rangle_B + \alpha|10\rangle_A|1\rangle_B \pm \alpha|11\rangle_A|0\rangle_B \pm \\ \pm\beta|00\rangle_A|0\rangle_B + \beta|01\rangle_A|1\rangle_B \mp \beta|10\rangle_A|0\rangle_B - \beta|11\rangle_A|1\rangle_B\end{matrix}\right\}$$

Группируем однотипные слагаемые Алисы и в результате получаем (очевидные индексы опускаем и разделяем уравнения на четыре, каждое из которых является телепортационной «несущей» - состоянием Белла):

$$\left|\Psi_2^{\phi+}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|01\rangle(\beta|0\rangle+\alpha|1\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\right\}$$

$$\left|\Psi_2^{\phi-}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{|00\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|01\rangle(\beta|0\rangle-\alpha|1\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|11\rangle(-\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\right\}$$

$$\left|\Psi_2^{\psi+}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{|00\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+|01\rangle(\beta|1\rangle+\alpha|0\rangle)+|10\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)+|11\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\right\}$$

$$\left|\Psi_2^{\psi-}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{|00\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)+|01\rangle(\beta|1\rangle-\alpha|0\rangle)+|10\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+|11\rangle(-\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\right\}$$

Как видим, каждое из четырех полученных чисто математическими преобразованиями состояний имеет четыре равновероятных исхода. После измерения на M_1 и M_2 пары кубитов Алисы, на стороне Боба будет получено одно из этих состояний. Если передать Бобу результаты измерения Алисы, то он сможет произвести над своим кубитом соответствующие унитарные преобразования, в результате которых получит состояние своего кубита, копирующее состояние телепортируемого кубита Алисы:

M_1M_2	$\Psi_3^{\phi+}$	Преобразование	Результат - $\Psi_4^{\phi+}$
00	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$	I	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
01	$\alpha\|1\rangle+\beta\|0\rangle$	X	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
10	$\alpha\|0\rangle-\beta\|1\rangle$	Z	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
11	$\alpha\|1\rangle-\beta\|0\rangle$	XZ	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$

M_1M_2	$\Psi_3^{\phi-}$	Преобразование	Результат - $\Psi_4^{\phi-}$
00	$\alpha\|0\rangle-\beta\|1\rangle$	Z	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
01	$-\alpha\|1\rangle+\beta\|0\rangle$	XZ	$-(\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle)$
10	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$	I	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
11	$-\alpha\|1\rangle-\beta\|0\rangle$	X	$-(\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle)$

M_1M_2	$\Psi_3^{\psi+}$	Преобразование	Результат - $\Psi_4^{\psi+}$
00	$\alpha\|1\rangle+\beta\|0\rangle$	X	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
01	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$	I	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
10	$\alpha\|1\rangle-\beta\|0\rangle$	XZ	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
11	$\alpha\|0\rangle-\beta\|1\rangle$	Z	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$

M_1M_2	$\Psi_3^{\psi-}$	Преобразование	Результат - $\Psi_4^{\psi-}$
00	$\alpha\|1\rangle-\beta\|0\rangle$	XZ	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
01	$-\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$	Z	$-(\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle)$
10	$\alpha\|1\rangle+\beta\|0\rangle$	X	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
11	$-\alpha\|0\rangle-\beta\|1\rangle$	I	$-(\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle)$

При этом, как видим, ни один из равновероятных результатов не повторяется в других «несущих». То есть, каждому из результатов на стороне Алисы - 00, 01, 10 и 11 для каждой из «несущих» соответствует свой отличный результат на стороне Боба, и наоборот. Например, результат на стороне Боба, не требующий никаких преобразований - I, соответствует результату измерений на стороне Алисы - 00, 01, 10 и 11 - в зависимости от «несущей».

Таким образом, мы смогли телепортировать неизвестное состояние частицы Алисы, используя каждое из четырех запутанных состояний Белла. Однако, возникает вопрос: а можно ли осуществить телепортацию как-то иначе, не используя запутанные состояния Белла? Попробуем это сделать, используя обычную пару не запутанных фотонов. Подадим на вход установки телепортации три фотона:

$$\left|\Psi_C\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0\right\rangle_C + \beta\left|1\right\rangle_C\right\}$$

$$\left|\Psi_A\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a\left|0\right\rangle_A + b\left|1\right\rangle_A\right\}$$

$$\left|\Psi_B\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{c\left|0\right\rangle_B + d\left|1\right\rangle_B\right\}$$

Как и раньше, кубиты A и C принадлежат Алисе, а кубит B передан Бобу. Исходное состояние кубитов и оно же после подстановок и преобразований:

$$\left|\Psi_0\right\rangle = \left|\Psi_C\right\rangle \otimes \left|\Psi_A\right\rangle \otimes \left|\Psi_B\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\alpha\left|0\right\rangle_C + \beta\left|1\right\rangle_C\right) \otimes \left(a\left|0\right\rangle_A + b\left|1\right\rangle_A\right) \otimes \left(c\left|0\right\rangle_B + d\left|1\right\rangle_B\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\alpha\left|0\right\rangle_C a\left|0\right\rangle_A + \beta\left|1\right\rangle_C a\left|0\right\rangle_A + \alpha\left|0\right\rangle_C b\left|1\right\rangle_A + \beta\left|1\right\rangle_C b\left|1\right\rangle_A\right) \otimes \left(c\left|0\right\rangle_B + d\left|1\right\rangle_B\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha\left|0\right\rangle_C a\left|0\right\rangle_A c\left|0\right\rangle_B + \beta\left|1\right\rangle_C a\left|0\right\rangle_A c\left|0\right\rangle_B + \alpha\left|0\right\rangle_C b\left|1\right\rangle_A c\left|0\right\rangle_B + \beta\left|1\right\rangle_C b\left|1\right\rangle_A c\left|0\right\rangle_B + \\ \alpha\left|0\right\rangle_C a\left|0\right\rangle_A d\left|1\right\rangle_B + \beta\left|1\right\rangle_C a\left|0\right\rangle_A d\left|1\right\rangle_B + \alpha\left|0\right\rangle_C b\left|1\right\rangle_A d\left|1\right\rangle_B + \beta\left|1\right\rangle_C b\left|1\right\rangle_A d\left|1\right\rangle_B \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha ac\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta ac\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha bc\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta bc\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \\ \alpha ad\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta ad\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \alpha bd\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta bd\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B \end{pmatrix}$$

Пропустим кубиты Алисы через гейт CNOT, в результате чего состояние кубита A изменится (инвертируется во 2, 4, 6 и 8 слагаемых уравнения, как отмечено индексом inv):

$$\Psi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha ac\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta ac\left|1\right\rangle_C\left|1_{inv}\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha bc\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta bc\left|1\right\rangle_C\left|0_{inv}\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \\ \alpha ad\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta ad\left|1\right\rangle_C\left|1_{inv}\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \alpha bd\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta bd\left|1\right\rangle_C\left|0_{inv}\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B \end{pmatrix} =$$

Далее Алиса пропускает телепортируемый кубит через гейт Адамара, преобразуя его по правилу:

$$\left|0\right\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$$

$$\left|1\right\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right)$$

После подстановки в предыдущее состояние получаем третье состояние:

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha ac\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta ac\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \\ \alpha bc\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta bc\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \\ \alpha ad\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta ad\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \\ \alpha bd\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta bd\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B \end{pmatrix} =$$

Раскроем внутренние скобки:

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha ac\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha ac\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta ac\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B - \beta ac\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \\ \alpha bc\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha bc\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta bc\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B - \beta bc\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \\ \alpha ad\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \alpha ad\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta ad\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B - \beta ad\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \\ \alpha bd\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \alpha bd\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta bd\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B - \beta bd\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B \end{pmatrix} =$$

Перегруппируем члены в этом уравнении по принадлежности Алисе и Бобу. Кубиты Алисы «собираем» в пары, в которых левый - кубит С, правый - кубит А. Очевидные индексы опускаем (парные кубиты принадлежат Алисе, одинарные - Бобу):

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha ac|00\rangle|0\rangle + \alpha ac|10\rangle|0\rangle + \beta ac|01\rangle|0\rangle - \beta ac|11\rangle|0\rangle + \\ \alpha bc|01\rangle|0\rangle + \alpha bc|11\rangle|0\rangle + \beta bc|00\rangle|0\rangle - \beta bc|10\rangle|0\rangle + \\ \alpha ad|00\rangle|1\rangle + \alpha ad|10\rangle|1\rangle + \beta ad|01\rangle|1\rangle - \beta ad|11\rangle|1\rangle + \\ \alpha bd|01\rangle|1\rangle + \alpha bd|11\rangle|1\rangle + \beta bd|00\rangle|1\rangle - \beta bd|10\rangle|1\rangle \end{pmatrix} =$$

Перегруппируем следующим образом:

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha ac|00\rangle|0\rangle + \beta ac|01\rangle|0\rangle + \alpha ac|10\rangle|0\rangle - \beta ac|11\rangle|0\rangle + \\ \beta bc|00\rangle|0\rangle + \alpha bc|01\rangle|0\rangle - \beta bc|10\rangle|0\rangle + \alpha bc|11\rangle|0\rangle + \\ \alpha ad|00\rangle|1\rangle + \beta ad|01\rangle|1\rangle + \alpha ad|10\rangle|1\rangle - \beta ad|11\rangle|1\rangle + \\ \beta bd|00\rangle|1\rangle + \alpha bd|01\rangle|1\rangle - \beta bd|10\rangle|1\rangle + \alpha bd|11\rangle|1\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |00\rangle\big((\alpha ac + \beta bc)|0\rangle + (\alpha ad + \beta bd)|1\rangle\big) + \\ |01\rangle\big((\alpha bc + \beta ac)|0\rangle + (\alpha bd + \beta ad)|1\rangle\big) + \\ |10\rangle\big((\alpha ac - \beta bc)|0\rangle + (\alpha ad - \beta bd)|1\rangle\big) + \\ |11\rangle\big((\alpha bc - \beta ac)|0\rangle + (\alpha bd - \beta ad)|1\rangle\big) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим возможные наглядные варианты такой «телепортации».

Выберем состояния «несущей» a=b=c=1, в результате чего получаем:

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |00\rangle\big((\alpha+\beta)|0\rangle + (\alpha+\beta)|1\rangle\big) + \\ |01\rangle\big((\alpha+\beta)|0\rangle + (\alpha+\beta)|1\rangle\big) + \\ |10\rangle\big((\alpha-\beta)|0\rangle + (\alpha-\beta)|1\rangle\big) + \\ |11\rangle\big((\alpha-\beta)|0\rangle + (\alpha-\beta)|1\rangle\big) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\begin{pmatrix} |00\rangle(\alpha+\beta) + |01\rangle(\alpha+\beta) + \\ |10\rangle(\alpha-\beta) + |11\rangle(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

При любом результате единичного измерения Алисы, как можно увидеть, на стороне Боба будет получено состояние, не содержащее коэффициентов α и β.

Теперь выберем состояние «несущей» a=c=0 (состояние, напоминающее запутанность). В этом случае получаем:

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \beta bd|00\rangle|1\rangle + \\ \alpha bd|01\rangle|1\rangle - \\ \beta bd|10\rangle|1\rangle + \\ \alpha bd|11\rangle|1\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} bd|1\rangle\big(\beta|00\rangle + \alpha|01\rangle - \beta|10\rangle + \alpha|11\rangle\big)$$

И в этом случае при любом результате единичного измерения Алисы будет получено состояние на стороне Боба, не содержащее коэффициентов α и β. Собственно говоря, в этом нет ничего удивительного, ведь переданный Бобу фотон не подвергается никаким преобразованиям и никак не связан с телепортируемым Алисой фотоном. Однако, можно заметить любопытную особенность такой «телепортации». Если буквально следовать её протоколу, то есть поворачивать фотон Боба согласно полученным от Алисы классическим битам, то можно при наличии достаточно большой статистики измерений Алисы создать на стороне Боба фотон, сколь угодно близко совпадающий с «телепортируемым» массивом одинаковых фотонов Алисы. Действительно, вероятность выпадения результатов измерения Алисы 00 пропорциональна одному из коэффициентов, а 01 - другому. Другими словами, по массиву косвенных измерений одинаковых состояний, его можно восстановить.

Помимо запутанных состояний Белла существуют состояния, которые также можно рассматривать как запутанные. Например, состояние:

$$|\Psi_x\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

не может быть представлено как тензорное произведение двух волновых функций, что является признаком запутанного состояния. Видимо, это состояние также может быть использовано для телепортации. Проверим это. Для этого обозначим кубит, состояние которого телепортируется, нижним индексом С, а кубиты, принадлежащие Алисе и Бобу, соответственно, индексами А и В. Тогда состояния кубитов, участвующих в телепортации, будут записаны таким образом:

$$\left|\Psi_C\right\rangle = \alpha\left|0_C\right\rangle + \beta\left|1_C\right\rangle$$

$$\left|\Psi_x\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\left|0_A 0_B\right\rangle + b\left|1_A 1_B\right\rangle\right)$$

Состояние на входе устройства телепортации в этом случае будет иметь вид:

$$\left|\Psi_0^X\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|0_C\right\rangle + \beta\left|1_C\right\rangle\right)\otimes\left(a\left|0_A 0_B\right\rangle + b\left|1_A 1_B\right\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(\left|a 0_A 0_B\right\rangle + b\left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(a\left|0_A 0_B\right\rangle + b\left|1_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

Кубиты Алисы пропускаются через гейт CNOT, что приводит к изменению состояний запутанной частицы Алисы на управляемом входе гейта. Совместное состояние всех трёх частиц принимает вид:

$$\left|\Psi_1^X\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(a\left|0_A 0_B\right\rangle + \left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(a\left|1_A 0_B\right\rangle + b\left|0_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

Далее телепортируемый кубит С Алисы пропускается через гейт Адамара Н, в котором он преобразуется по правилу:

$$\left|0\right\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$$

$$\left|1\right\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right)$$

Отсюда получаем третье состояние:

$$\left|\Psi_2^X\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left(a\left|0_A 0_B\right\rangle + b\left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left(a\left|1_A 0_B\right\rangle + b\left|0_A 1_B\right\rangle\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\alpha\left(\left|0\right\rangle_C + \left|1\right\rangle_C\right)\left(a\left|0_A 0_B\right\rangle + b\left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left(\left|0\right\rangle_C - \left|1\right\rangle_C\right)\left(a\left|1_A 0_B\right\rangle + b\left|0_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

Раскроем скобки и перегруппируем кубиты в этом уравнении по их принадлежности Алисе или Бобу (кубиты С и А оба принадлежат Алисе, поэтому индекс им оставляем общий - А):

$$\left|\Psi_2^X\right\rangle = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \alpha a\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha b\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \alpha a\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha b\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \\ \beta a\left|0\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \beta b\left|0\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B - \beta a\left|1\right\rangle_C\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B - \beta b\left|1\right\rangle_C\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \alpha a\left|00\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha b\left|01\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \alpha a\left|10\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B + \alpha b\left|11\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \\ \beta b\left|00\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + \beta a\left|01\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B - \beta b\left|10\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B - \beta a\left|11\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B \end{Bmatrix}$$

Группируем однотипные слагаемые Алисы и в результате получаем (очевидные индексы опускаем):

$$\left|\Psi_2^X\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{\left|00\right\rangle\left(\alpha a\left|0\right\rangle + \beta b\left|1\right\rangle\right) + \left|01\right\rangle\left(\beta a\left|0\right\rangle + \alpha b\left|1\right\rangle\right) + \left|10\right\rangle\left(\alpha a\left|0\right\rangle - \beta b\left|1\right\rangle\right) + \left|11\right\rangle\left(\alpha b\left|1\right\rangle - \beta a\left|0\right\rangle\right)\right\}$$

Проверим правильность выкладок. Подставим a=b=1:

$$\left|\Psi_2^X\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{\left|00\right\rangle\left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right) + \left|01\right\rangle\left(\beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle\right) + \left|10\right\rangle\left(\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\right) + \left|11\right\rangle\left(\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle\right)\right\}$$

Результат совпадает с полученными выше уравнениями, что можно рассматривать как свидетельство корректности преобразований. Итак, мы видим, что полученное чисто математическими преобразованиями состояние как и выше имеет четыре равновероятных исхода. После измерения на M_1 и M_2 пары кубитов Алисы, на стороне Боба будет получено одно из этих состояний. Если передать Бобу результаты измерения Алисы, то он сможет произвести над своим кубитом соответствующие унитарные преобразования, в результате которых получит состояние своего кубита, копирующее состояние телепортируемого кубита Алисы, хотя в несколько «деформированном» виде:

M_1M_2	Ψ_3^X	Преобразование	Результат - Ψ_4^X
00	$\alpha a\|0\rangle + \beta b\|1\rangle$	I	$\alpha a\|0\rangle + \beta b\|1\rangle$
01	$\alpha b\|1\rangle + \beta a\|0\rangle$	X	$\alpha b\|0\rangle + \beta a\|1\rangle$
10	$\alpha a\|0\rangle - \beta b\|1\rangle$	Z	$\alpha a\|0\rangle + \beta b\|1\rangle$
11	$\alpha b\|1\rangle - \beta a\|0\rangle$	XZ	$\alpha b\|0\rangle + \beta a\|1\rangle$

Наличие коэффициентов a и b означает, по всей видимости, что исходный телепортируемый кубит повернут на некоторый угол. Очевидно, этот угол известен до начала телепортации и в конце неё может быть унитарным преобразованием применён к результату.

Может возникнуть вопрос, а что это за состояние, которое мы только-что использовали для телепортации? Внимательно присмотревшись к нему, можно заметить, что известные четыре запутанные состояния Белла являются частными (специальными) случаями запутанности, а рассмотренное состояние запутанности является общим, полным состоянием запутанности, включающими в себя состояния Белла как частный случай. Действительно, состояние запутанности может быть получено с помощью гейта CNOT. Пропустим через него два кубита (управляющий и управляемый, соответственно):

$$\left|\psi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$$

$$\left|\psi\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

На входе гейта состояние имеет вид:

$$\left|\psi^{+}\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right) \otimes \left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|10\right\rangle\right)$$

Запишем его в виде матрицы:

$$\left|\psi^{+}\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\left|00\right\rangle + 0\left|01\right\rangle + 1\left|10\right\rangle + 0\left|11\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

В матричном представлении гейт CNOT имеет вид:

$$\left|CNOT\right\rangle = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

После прохождения взятых кубитов через гейт CNOT, мы получим:

$$\left|\psi_1^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right) = \left|\phi^{+}\right\rangle$$

Это запутанное состояние Белла. Проделаем эти же вычисления с другой парой кубитов:

$$\left|\psi^{+}\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$$

$$\left|\psi\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

На входе гейта состояние имеет вид:

$$\left|\psi^{\alpha}\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle = \left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right) \otimes \left|0\right\rangle = \left(\alpha\left|00\right\rangle + \beta\left|10\right\rangle\right)$$

Запишем его в виде матрицы:

$$\left|\psi^{\alpha}\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle = \alpha\left|00\right\rangle + 0\left|01\right\rangle + \beta\left|10\right\rangle + 0\left|11\right\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\0\end{pmatrix}$$

После прохождения взятых кубитов через гейт CNOT, мы получим:

$$\left|\psi_1^{\alpha}\right\rangle = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\\beta\end{pmatrix} = \alpha\left|00\right\rangle + \beta\left|11\right\rangle = \left|\phi^{\alpha+}\right\rangle$$

Это явно запутанное состояние, но в более общем виде, чем состояние Белла. Действительно, его невозможно представить в виде тензорного произведения двух кубитов, а это является признаком запутанного состояния:

$$\left|\phi^{\alpha+}\right\rangle = \alpha\left|00\right\rangle + \beta\left|11\right\rangle \neq \left|\psi_1\right\rangle \otimes \left|\psi_2\right\rangle$$

Если же приравнять α=β=1 и нормировать, то есть применить унитарное преобразование – поворот кубитов в пространстве, то мы получим частное значение уравнения – состояние Белла (ЭПР):

$$\left|\phi^{\alpha+}_{\alpha=\beta=1}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\left|00\right\rangle + 1\left|11\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right) = \left|\phi^{+}\right\rangle$$

Общее, полное состояние запутанности $\psi^{\alpha+}$ (это одно из четырёх общих, полных состояний запутанности) обладает интересными свойствами. Как и состояний Белла, таких общих состояний четыре:

$$\left|\phi^{\alpha\pm}\right\rangle = \alpha\left|00\right\rangle \pm \beta\left|11\right\rangle$$

$$\left|\psi^{\alpha\pm}\right\rangle = \alpha\left|01\right\rangle \pm \beta\left|10\right\rangle$$

11.05 - 10.10.2013

Quantum teleportation: a detailed analysis

Putenikhin P.V.
m55@mail.ru

Abstract
Considered in detail the basic mathematical calculations underlying quantum teleportation. Used a variety of "teleportation carriers" - a pair of qubits carrying out the transfer of the quantum state.

Адрес статьи в интернете:
http://econf.rae.ru/article/8041
http://econf.rae.ru/pdf/2013/11/2957.pdf
http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/teleport.shtml